Teorie nutná ke zvládnutí cvičení 4

II.3. Momenty náhodné veličiny

Definice (Střední hodnota)**.** Buď X náhodná veličina.

1. Je-li X **diskrétní** náhodná veličina, pak její střední hodnotu počítáme jako
$$\mathbb{E}\, X = \sum_k x_k p_k, \quad \text{(existuje-li)},$$
kde $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ a sčítáme přes všechna k, pro která X nabývá nějaké hodnoty $x_k \in \mathbb{R}$.

2. Je-li X **spojitá** náhodná veličina, pak její střední hodnotu počítáme jako
$$\mathbb{E}\, X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \text{(existuje-li)},$$
kde f je hustota náhodné veličiny X.

Definice (Obecný moment)**.** Buď X náhodná veličina a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Je-li X **diskrétní** náhodná veličina, pak střední hodnota $h(X)$ je
$$\mathbb{E}\, h(X) = \sum_k h(x_k) p_k, \quad \text{(existuje-li)}.$$

2. Je-li X **spojitá** náhodná veličina, pak střední hodnota $h(X)$ je
$$\mathbb{E}\, h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \text{(existuje-li)}.$$

Definice (Rozptyl)**.** Buď X náhodná veličina, rozptyl X spočítáme jako
$$\mathrm{var} X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$$

Poznámka.

1. Střední hodnota nám říká, jakou hodnotu bychom očekávali, že bude mít náhodná veličina X. Rozptyl je míra variability a říká nám, jak moc se náhodná veličina může lišit od očekávané hodnoty.

2. Z první rovnosti v definici rozptylu vidíme, že při výpočtu sčítáme a nebo integrujeme nezáporná čísla (druhou mocninu $X - \mathbb{E}X$). A tedy...

Rozptyl nikdy nemůže vyjít záporný!

Vlastnosti střední hodnoty.

1. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a náhodnou veličinu X platí: $\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}X$.

2. Pro každé dvě náhodné veličiny X, Y platí: $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$.

Vlastnosti rozptylu.

1. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a náhodnou veličinu X platí: $\mathrm{var}(a + bX) = b^2 \mathrm{var} X$.

2. Obecně **neplatí**, že $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var} X + \mathrm{var} Y$, pouze pokud X a Y jsou nezávislé (bude vysvětleno příště).

Připomenutí - integrace per partes.
$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' v$$